Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

6. Waldovy rovnosti

- posouzení, zda čas zastavení je integrovatelný markovský čas
- ověření předpokladů Waldových rovností

---

1. Nechť S_n je centrovaná náhodná procházka s nenulovým a konečným rozptylem. Označme $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots, S_n)$ kanonickou filtraci procesu S_n.

   (a) Rozhodněte, zda $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq 1\}$ je integrovatelný $\mathcal{F}_n$-markovský čas.

   (b) Rozhodněte, zda $\nu_k = \inf\{n \in \mathbb{N} : |S_n| \geq k\}$ je integrovatelný $\mathcal{F}_n$-markovský čas.

2. Nechť $Z_k, k \in \mathbb{N}$ jsou i.i.d. veličiny s Poissonovým rozdělením s paramatrem 1. Označme
$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \quad \text{a} \quad \mu := \inf\{k \in \mathbb{N} : \Pi_n = 0\}, \quad \nu = \mu - 1.$$

   (a) Rozhodněte, zda μ, ν jsou integrovatelný $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$-markovské časy.

   (b) Spočtěte $E\mu, E\nu, ES_\mu, ES_\nu$.

3. Nechť $X_k \sim R\{-1, 1\}$ jsou nezávislé veličiny. Označme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ a $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ a $\lambda = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 5\}$.

   (a) Rozhodněte, zda $\lambda, 2\lambda, 1_{[S_1 \geq 0]}$ jsou $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$-markovské časy.

   (b) Rozhodněte, zda $\lambda \in \mathbb{L}_1$ a spočtěte $E\lambda$.

4. Nechť S_n je symetrická náhodná procházka, tj. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, kde $X_k \sim R\{-1, 1\}$ jsou i.i.d. veličiny.

   (a) Rozhodněte, zda $\rho = \nu_k \wedge \tau$ je integrovatelný $\mathcal{F}_n$-markovský čas a spočtěte $P(S_\rho = 1)$.

   (b) Spočtěte $E\rho$.

   (c) Spočtěte vytvořující funkci $s \in (0, 1) \mapsto \mathbb{E}[s^\rho]$, resp. momentovou vytvořující funkci $\mathbb{E}[e^{u\rho}]$.

5. Nechť $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ je náhodná procházka, kde $X_k \sim R\{-1, 0, 1\}$ jsou i.i.d. veličiny.

   (a) Rozhodněte, zda $\rho = \nu_k \wedge \tau$ je integrovatelný $\mathcal{F}_n$-markovský čas a spočtěte $P(S_\rho = 1)$.

   (b) Spočtěte $E\rho$.

   (c) Spočtěte vytvořující funkci $s \in (0, 1) \mapsto \mathbb{E}[s^\rho]$, resp. momentovou vytvořující funkci $\mathbb{E}[e^{u\rho}]$.

6.* Nechť $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ je náhodná procházka a $P(X_k = \pm 1) = \frac{3 \pm 1}{6}$. Spočtěte $E \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$.

7. Nechť $X_n \sim R\{-1, 1\}$ jsou nezávislé a $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Označme $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n^4 > 3\}$ a $\nu = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \leq -1\}$.

   (a) Rozhodněte, zda jsou následující časy markovské vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), n \in \mathbb{N}$.

   (b) Spočtěte jejich střední hodnotu.

   (c) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl zastavení procesu S_n v jednotlivých časech.
   (i) τ (ii) ν (iii) $\rho = \tau \wedge \nu + 2$ (iv) $\eta = \tau \wedge \nu - 1$ (v) $\mu = \kappa \vee \rho$ (vi) $\kappa = \tau \vee \rho - 1$ (vii) $\varepsilon = 2\tau$.

   (d) Spočtěte $P(\tau < \nu)$.

   (e) Spočtěte $E[S_\tau | \mathcal{F}_{\tau \wedge \nu}]$.